Escriba y justifique sus respuestas en el cuadernillo provisto.
Las primeras cinco preguntas valen 3 pts. cada una y debe responderlas seleccionando un único recuadro $\square$ *en el cuadernillo. Las últimas tres son de desarrollo.*

1. (3 pts.)

   Sean a y b constantes no nulas. Considere la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{(ax)^2 + b^2 x}}{bx}$. Diga cuál de las siguientes rectas es una asíntota horizontal de $f(x)$.

2. (3pts.)

   Halle la ecuación de la recta tangente a la elipse $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{5} = 1$ en un punto (x_0, y_0) de esa elipse.

3. (3 pts.)
   Halle la derivada (con respecto a x) de la función $\operatorname{arcsen}(\sqrt{1-x^2})$ para $0 < |x| < 1$.

4. (3 pts.)
   Si $f(x) = x^5 - x^3 + 5x + 1$, diga cuál de las afirmaciones acerca de $f^{-1}(x)$ es cierta.

5. (3 pts.)

   Considere la función $h(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. Encuentre una afirmación correcta acerca de $h(x)$.

---

6. (7 pts.) *Esta pregunta y las que siguen son de desarrollo.*
   Considere las funciones g y h de las cuales se saben que son derivables en los puntos $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$. Halle la derivada $f'(0)$ (si existe) de la función compuesta:

   $$f(x) = h\left(\frac{5x + g(x)}{2\cos(x)}\right),$$

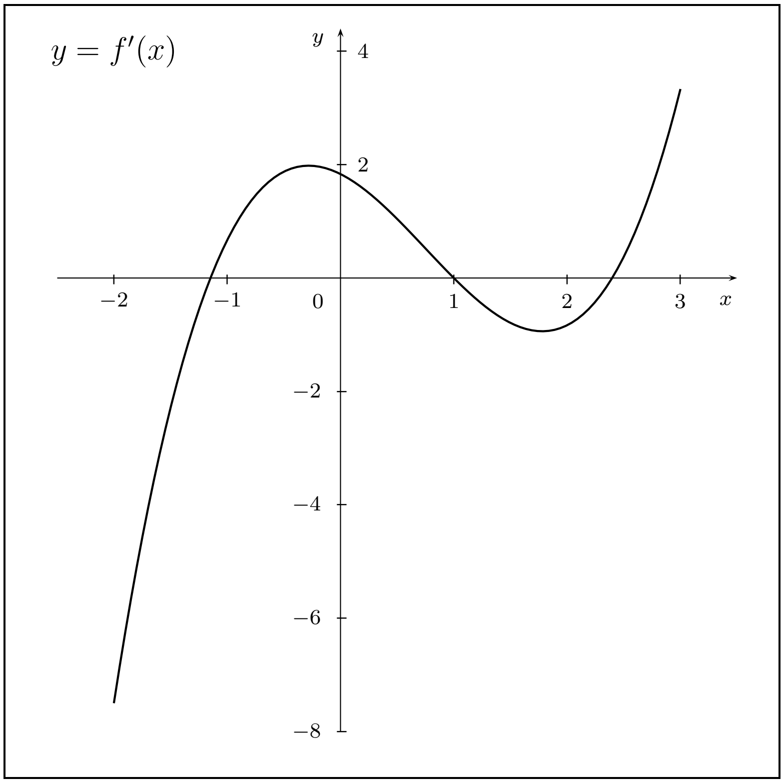
   asumiendo conocida la siguiente tabla de valores de las funciones g y h y sus derivadas.

	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$
$h(x)$	2	-3	-3	6
$g(x)$	4	-1	-4	3

	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$
$h'(x)$	5	2	-1	2
$g'(x)$	3	4	-2	3

7. (7 pts.)
   Haga un dibujo detallado de la gráfica de la función $f : [-2, 3] \to [-3, 0]$, de la cual también se tiene la siguiente información: Se conoce una tabla de valores de $f(x)$ y la gráfica de $f'(x)$ tal como aparecen abajo.

	$x=-2$	$x=-1$	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$
$f(x)$	0	$-8/3$	-1	0	$-2/3$	0



8. (6 pts.)
Un globo esférico es inflado con aire a razón de 2 metros cúbicos por minuto. ¿Con qué rapidez aumenta el radio del globo cuando éste contenga un volumen igual a cuatro veces el radio? (el volumen es no nulo y medido en metros cúbicos mientras el radio es medido en metros). Recuerde que el volumen V de un globo esférico de radio r se expresa por la fórmula $V = 4\pi r^3/3$.

#1-#5→15 pts	#6→7 pts	#7→7 pts	#8→6 pts	Total=35 pts

1. (a) ☐ No tiene asíntota horizontal.

   (b) ☐ $y = \dfrac{a+b}{b}$.

   (c) ☐ $y = 0$.

   (d) ☐ $y = \dfrac{a^2+b^2}{b}$.

   (e) ☐ $y = \dfrac{|a|}{b}$.

2. (a) ☐ $y - y_0 = -\dfrac{5x}{3y}(x - x_0)$

   (b) ☐ $y - y_0 = \dfrac{3y_0}{5x_0}(x - x_0)$

   (c) ☐ $y - y_0 = -\dfrac{5x_0}{3y_0}(x - x_0)$

   (d) ☐ $\dfrac{2}{3}x + \dfrac{2}{5}y = 0$

   (e) ☐ $\dfrac{2}{3}x + \dfrac{2}{5}y = 1$

---

3. (a) ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{x^2}}$

   (b) ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

   (c) ☐ $-\dfrac{2x}{\sqrt{x^2}}$

   (d) ☐ $\dfrac{1}{2\sqrt{x^2}\sqrt{1-x^2}}$

   (e) ☐ $-\dfrac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1-x^2}}$

4. (a) ☐ $f^{-1}(x)$ existe y $(f^{-1})'(8) = \dfrac{1}{13}$

   (b) ☐ $f^{-1}(x)$ existe y $(f^{-1})'(8) = 13$

   (c) ☐ $f^{-1}(x)$ existe y $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{8}$

   (d) ☐ $f^{-1}(x)$ existe y $(f^{-1})'(1) = 8$

   (e) ☐ f no es inyectiva y no se puede calcular f^{-1}.

---

5. (a) ☐ La función $h(x)$ es derivable en $x = 0$, y $h'(0) = 0$.

   (b) ☐ La función $h(x)$ es derivable en $x = 0$, y $h'(0) = 1$.

   (c) ☐ La función $h(x)$ no es continua en $x = 0$ pues no existe $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$.

   (d) ☐ Existe $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$, pero no es igual a $h(0)$.

   (e) ☐ La función $h(x)$ es continua en $x = 0$, pero no es derivable en $x = 0$.

SOLUCIONES:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{a^2x^2+b^2x}}{bx} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{a^2+b^2/x}}{b} = \dfrac{\sqrt{a^2}}{b}$. (Opción (e)).

2. Derivando implícitamente la ecuación de la elipse se obtiene

$$\frac{2}{3}x + \frac{2}{5}yy' = 0$$

Despejando y' y evaluando en (x_0, y_0) se obtiene la pendiente

$$m = -\frac{5x_0}{3y_0}$$

Entonces la ecuación es

$$y - y_0 = -\frac{5x_0}{3y_0}(x - x_0) \quad \text{(Opción (c))}.$$

3. $D_x(\operatorname{arcsen}(\sqrt{1-x^2})) = \dfrac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1-x^2}}$. (Opción (e)).

4. $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 5$, la cual es positiva para todo x. Por lo tanto f es creciente en todo $\mathbb{R}$, lo que implica que es inyectiva.

Tenemos que $f(0) = 1 (\Rightarrow f^{-1}(1) = 0)$, mientras que $f(1) = 8 (\Rightarrow f^{-1}(8) = 1)$.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Evaluando en $x = 1$ y en $x = 8$, obtenemos

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{5} \qquad (f^{-1})'(8) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{13} \quad \text{(Opción (a))}.$$

5. $h'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\operatorname{sen}(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{sen}(x) = 0$. (Opción (a)).

Esto último se deduce usando el teorema del emparedado con $x_0 = 0$ y las funciones

$$-|x| \le x\operatorname{sen}(x) \le |x|.$$

6. $f'(x) = h'\left(\dfrac{5x+g(x)}{2\cos(0)}\right) \cdot \dfrac{(5+g'(x))(2\cos(x)) - (5x-g(x))(-2\operatorname{sen}(x))}{(2\cos(x))^2}$

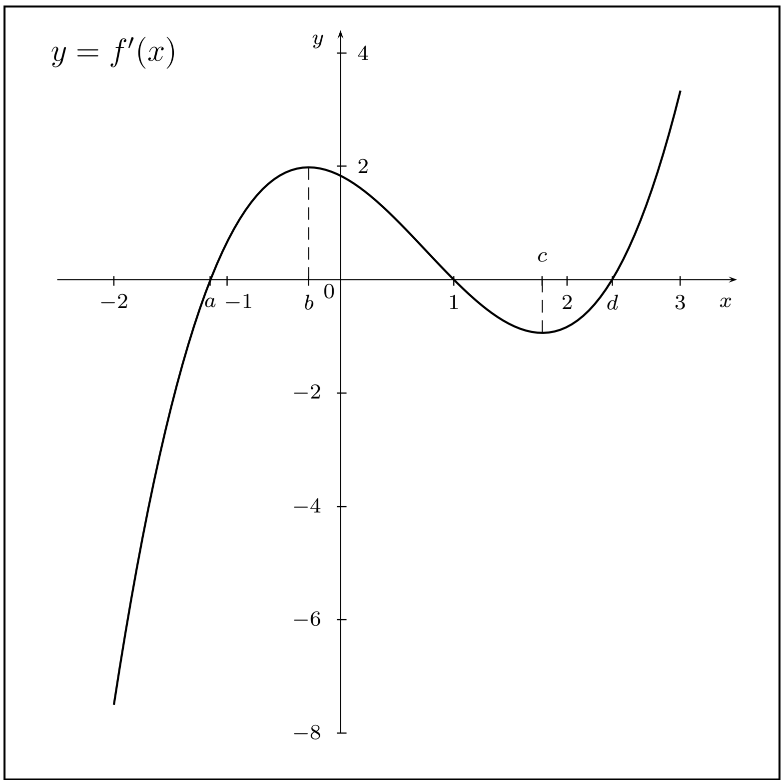
$f'(0) = h'\left(\dfrac{5(0)+g(0)}{2\cos(0)}\right) \cdot \dfrac{(5+g'(0))(2\cos(0)) - (5(0)-g(0))(-2\operatorname{sen}(0))}{(2\cos(0))^2}$

$= h'\left(\dfrac{g(0)}{2}\right) \cdot \dfrac{(5+g'(0))(2) - (-g(0))(-2(0))}{(2)^2}$

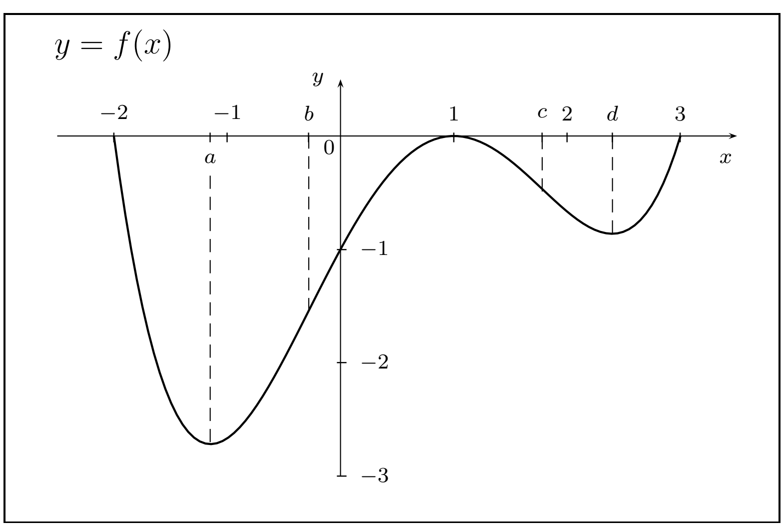
$= h'\left(\dfrac{4}{2}\right) \cdot \dfrac{(5+3)(2) - 0}{(2)^2} = h'(2) \cdot \dfrac{16}{4} = (-1) \cdot (4) = -4$

7. Recordemos que el signo de $f'(x)$ determina los intervalos de crecimiento de $f(x)$, mientras que el crecimiento de $f'(x)$ determina la concavidad. Demarcando los puntos a, b, c y d, donde se observan cambios de signo y/o de crecimiento de $f'(x)$, expresamos las características de $y = f(x)$ en la siguiente tabla:

$x =$	-2		a		b		1		c		d		3
Crecimiento		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
Concavidad		$\smile$		$\smile$		$\frown$		$\frown$		$\smile$		$\smile$	



La gráfica de f entonces luce así:



Los puntos donde $x = a$, d son mínimos locales, mientras que los puntos en los que $x = -2$, 1, 3 son máximos locales (y globales) para f.

Los puntos donde $x = b$, c son puntos de inflexión para f.

8. Derivando con respecto al tiempo t la ecuación que relaciona el volumen V con el radio r resulta
$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$
En el momento en que $V = 4r$, es decir $\frac{4}{3}\pi r^3 = 4r$, resulta $r = 0$ ó $r^2 = \frac{3}{\pi}$. Como $V \neq 0$, entonces $r \neq 0$. Sustituyendo entonces $r^2 = \frac{3}{\pi}$ en la ecuación anterior, y despejando la rapidez de r, resulta
$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{12}\text{metros/minutos.}$$